Guía práctica de optimización dinámica discreta

Matemática para Economistas III (Universidad Nacional de Lanús)

Scan to open on Studocu

Studocu is not sponsored or endorsed by any college or university
Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

GUÍA PRÁCTICA DE EJERCICIOS N°10: OPTIMIZACIÓN DINÁMICA DISCRETA

Ejercicios introductorios

1) $$\begin{cases} \max V = \sum_{t=0}^{2} -(x_t^2 + u_t^2) - x_3^2 \\ sujeto\ a\ x_{t+1} = 2x_t + u_t\ para\ t = 0,1,2 \\ con\ x_0 = 5 \end{cases}$$

a. Plantear las CPO utilizando el método de Lagrange
b. Resolver utilizando el método de Lagrange.
c. Encontrar el valor de u_0 por el método de Bellman.
d. Encontrar el valor de x_3 por el método de Bellman.

2) $$\begin{cases} \max V = \sum_{t=0}^{T} \sqrt{u_t} \\ sujeto\ a: x_{t+1} = x_t - u_t \\ con\ x_0\ dado,\ x_{T+1} = 0 \end{cases}$$

a. Plantear las CPO utilizando el método de Lagrange y resolver.
b. Encontrar la relación entre la variable de estado y la de control (Mediante Bellman).
c. Encontrar la ecuación de Euler.
d. Resolver las ecuaciones en diferencias.

3) $\max U : \sum_{t:0}^{T} -u_t^2 \ \ s.a: x_{t+1} = x_t - u_t \ \wedge \ x_0\ dado \ \wedge \ x_{T+1} = 0$

a. Plantear las CPO utilizando el método de Lagrange.
b. Resolver utilizando el método de Lagrange.
c. Encontrar la ecuación de Euler y resolver.
d. Graficar el diagrama de fases.

4) $$\begin{cases} \min \sum_{k=0}^{3} [x(k)^2 + u(k)^2] \\ sujeto\ a: x(k+1) = x(k) + u(k), para\ k = 0,1,2,3 \\ con\ x(0) = 0, x(4) = 8, siendo: u(k), número\ no\ negativo \end{cases}$$

a. Plantear las CPO utilizando el método de Lagrange
b. Resolver utilizando el método de Lagrange.
c. Encontrar el valor de u_0 por el método de Bellman.
d. Encontrar el valor de u_3 por el método de Bellman.

Ejercicios de profundización

Aplicaciones económicas

5) Dado el siguiente problema de optimización intertemporal discreto:

$$\max_{c_t} U = \sum_{t=0}^{T} \frac{\ln c_t}{(1+\omega)^t} \ \text{ s.a. } s_{t+1} = (1+\delta)(s_t - c_t) \ \text{ para } \ t = 0, \dots, T \ \ \text{con } s_0 \text{ dado} \wedge s_{T+1}; 0 < \omega \wedge \delta < 1 \ \wedge \omega < \delta$$

a. Plantear las CPO que surgen del método de Lagrange.
b. Plantear la ecuación de Bellman a valor presente.
c. Hallar la ecuación de Euler.
d. Realizar un diagrama de fases que indique la trayectoria temporal del consumo.

6) Dado el modelo de crecimiento neoclásico donde c es el consumo y k la inversión:

$$(P)\begin{cases} \max U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t 2\sqrt{c_t} \\ sujeto\ a\ k_{t+1} = \alpha(k_t - c_t) \\ con\ k_0 dado \end{cases}$$

a. Plantear la ecuación de Bellman para problemas con factor de descuento (función valor corriente)
b. Calcular la condición de primer orden de la ecuación de Bellman, hallar la ecuación de Benveniste y Scheinkman y concluir en la ecuación de Euler.
c. Resolver la ecuación de Euler para obtener la trayectoria temporal del consumo.

This document is available on studocu

Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

7) Dado el siguiente problema de optimización intertemporal discreto:

$$\max U = \sum_{t=0}^{T} \ln(c)\omega^t \;\; s.a. \;\; st+1 = \alpha\,(st - ct) \;\; para \;\; t = 0, \dots, T \;\; con \;\; s0 \; dado \wedge sT+1 = 0 \; ; 0 < \omega < 1;$$

$$\alpha > 1 \wedge \omega\alpha < 1$$

a. Plantear las CPO que surgen del método de Lagrange.
b. Plantear la ecuación de Bellman a valor presente.
c. Hallar la ecuación de Euler.
d. Realizar un diagrama de fases que indique la trayectoria temporal del consumo.

Aplicación financiera

8) Dado el siguiente problema del inversor donde x_t es la cantidad de dinero en el t-ésimo año y u_t la cantidad de dinero reinvertido:
$Max \; \sum_{t=1}^{T} b\sqrt{x_t - u_t} \;\; s.a \;\; x_{t+1} = a.u_t; \; 0 \le u_t \le x_t; \; \text{con } x_1 \text{ dado}$

a. Plantear las CPO utilizando el método de Lagrange.
b. Resolver utilizando el método de Lagrange.
c. Encontrar la relación entre la variable de estado y la de control (mediante Bellman).
d. Encontrar la ecuación de Euler y resolver las ecuaciones en diferencia.

Ejercicios de parcial

9) Dado el siguiente problema de optimización intertemporal discreto:

$$\max_{c_t} U = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln c_t \quad \text{s.a.} \quad s_{t+1} = \alpha(s_t - c_t) \quad \text{para } t = 0, \dots, T \quad \text{con } s_0 \text{ dado} \quad s_{T+1} = 0$$

a. Plantee las CPO que surgen del método de Lagrange.
b. Plantee la ecuación de Bellman.
c. Resuelva el problema mediante la ecuación de Euler. Explique detalladamente los pasos para la construcción del sistema asociado.
d. ¿El resultado obtenido en el punto c., difiere del resultado que se obtendría en el punto a.? ¿qué puede decir al respecto? Justifique.

10) Dada una función de utilidad cóncava:
$Max \; U = \sum_{t=0}^{T} -ct^2 \qquad s.a: x_{t+1} = xt - ct \wedge x_0 \; dado \wedge x_{T+1} = 0$

a. Plantear las CPO utilizando el método de Lagrange.
b. Resolver utilizando el método de Lagrange.
c. Encontrar la ecuación de Euler.
d. Encontrar la función de política que surge de la resolución mediante Bellman.

11) Dado el siguiente problema de optimización intertemporal:

$$\text{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t) \quad \text{s.a.} \quad k_{t+1} = k_t - c(t) \quad \text{con } k_{0\,\text{dado}}$$

La forma de la solución es: $v(k_t) = A + B \ln k_t$

a. Escriba la ecuación de recurrencia de Bellman correspondiente y explique el significado de sus términos.
b. Encuentre la expresión de $c_t = f(k_t)$ en el óptimo.
c. Encuentre la expresión de $k_{t+1} = f(k_t)$ en el óptimo.
d. Encuentre el valor del parámetro “B”.

Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

Respuestas

1)

a. $L = \sum_{t=0}^{2} -(x_t^2 + u_t^2) - x_3^2 + \sum_{t=0}^{2} \lambda_t(2x_t + u_t - x_{t+1})$

$$\frac{\partial L}{\partial u_0} = -2u_0 + \lambda_0 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2u_1 + \lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = -2u_2 + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_1 - \lambda_0 + 2\lambda_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -2x_3 - \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} = 10 + u_0 - x_1 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2x_1 + u_1 - x_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2x_2 + u_2 - x_3 = 0$$

b. $u_0 = -8\ u_1 = -3\ u_2 = -1\ x_1 = 2\ x_2 = 1\ x_3 = 1$

c. $u_0 = -8$

d. $x_3 = 1$

2)

a. $u_t = (\frac{1}{2k_1})^2\ \ x_t = \ k_2 - (\frac{1}{2k_1})^2$

b. $u_t = \frac{x_t}{T-t+1}\quad V_t = \sqrt{T-t+1}\sqrt{x_t}$

c. $u_{t+1} = u_t$

d. $u_t = \ k_1\ x_t = \ k_2 - k_1 t$

3)

a. $L = \sum_{t=0}^{T} -u_t^2 + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t(x_t - u_t - x_{t+1})$

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = -2u_t - \lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_{t+1}} = \lambda_{t+1} - \lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_{T+1}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = x_t - u_t - x_{t+1} = 0$$

b. $\lambda_t: c_1\ \ u_t: -\frac{c_1}{2}\ \ x_t: c_2 + \frac{c_1}{2}t$

c. $u_t: c_1\ \ x_t: c_2 - c_1 t$

4)

a. $u_0 = \frac{8}{21}\ u_1 = \frac{16}{21}\ u_2 = \frac{40}{21}\ u_3 = \frac{104}{21}\ x_1 = \frac{8}{21}\ x_2 = \frac{8}{7}\ x_3 = \frac{64}{21}$

b. $u_0 = \frac{8}{21}$

c. $u_3 = \frac{104}{21}$

5)

a. $L = \sum_{t=0}^{T} \frac{\ln c_t}{(1+w)^t} + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t((1+\alpha)s_t - (1+\alpha)c_t - s_{t+1})$

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{1}{(1+w)^t c_t} - (1+\alpha)\lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial s_{t+1}} = (1+\alpha)\lambda_{t+1} - \lambda_t = 0$$

This document is available on studocu

Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

$$\frac{\partial L}{\partial s_{T+1}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = (1+\alpha)(s_t - c_t) - s_{t+1} = 0$$

c. $c_t = K_1[(1+\delta)(\frac{1}{1+w})]^t$

d. $c_t = \frac{1}{(1+\delta)K_1}[(1+\delta)(\frac{1}{1+w})]^t$

6)

a. $L = \sum_{t=0}^{T} \beta^t 2\sqrt{c_t} + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t(\alpha k_t - \alpha c_t - k_{t+1})$
$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\beta^t}{\sqrt{c_t}} - \alpha\lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}} = \alpha\lambda_{t+1} - \lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = \alpha(k_t - c_t) - k_{t+1} = 0$$

b. $c_{t+1} = c_t\alpha^2\beta^2$

c. $c(t) = A_1(\alpha^2\beta^2)^t$

7)

c. $c_t = A_1(\alpha w)^t$

d. $c_t = \frac{1}{\alpha A_1}(\alpha w)^t$

8)

a. $x_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t$
$$u_t = \frac{c_1 r_1^{t+1} + c_2 r_2^{t+1}}{a}$$

b. $u_t(x) = \frac{(a+a^2+\cdots+a^{T-t})\,x_t}{1+a+a^2+\cdots+a^{T-t}} = x_t \cdot \frac{\sum_{s=1}^{T-t} a^s}{\sum_{S=0}^{T-t} a^s}$

$$v_t(x) = b\sqrt{(1+a+a^2+\cdots+a^{T-t})\,x_t} = b\sqrt{\sum_{S=0}^{T-t}(a^s)\,x_t}$$

c. $x_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t$

d. $u_t = \frac{c_1 r_1^{t+1} + c_2 r_2^{t+1}}{a}$

9)

a. $L = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln c_t + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t(\alpha s_t - \alpha c_t - s_{t+1})$
$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{\beta^t}{c_t} - \alpha\lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial s_{t+1}} = \alpha\lambda_{t+1} - \lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial s_{T+1}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = \alpha(s_t - c_t) - s_{t+1} = 0$$

b. $W_t(s_t) = \max c_t\,[\ln c_t + \beta w_{t+1}\alpha(s_t - c_t)]$

c. $c_t = K_1(\alpha\beta)^t$

d. $c_t = \frac{1}{\alpha K_1}(\alpha\beta)^t$

10)

a. $L = \sum_{t=0}^{T} -c_t^2 + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t(x_t - c_t - x_{t+1})$

Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = -2c_t - \lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_{t+1}} = \lambda_{t+1} - \lambda_t = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_{T+1}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = x_t - c_t + x_{t+1} = 0$$

b. $\lambda = K_1;\ c_t = -\frac{K_1}{2}\ ;\ x_t = K_2 + \frac{K_1}{2}t$
c. $c_t = K_1;\ x_t = K_2 - K_1 t$

Ejercicios resueltos

2)
a. $Max\ V = \sum_{t=0}^{T} \sqrt{u_t}$ s.a: $x_{t+1} = x_t - u_t \qquad x_0\ dado \qquad x_{T+1} = 0$
Planteamos el lagrangiano y las CPO de este método. Lo resolvemos:

$$L = \sum_{t=0}^{T} \sqrt{u_t} + \sum_{t=0}^{T} \lambda_t (x_t - u_t - x_{t+1})$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{1}{2} u_t^{-\frac{1}{2}} - \lambda_t = 0 \ (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_{t+1}} = \lambda_{t+1} - \lambda_t = 0 \ (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_{T+1}} = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = x_t - u_t - x_{t+1} = 0 \ (3)$$

Resolvemos las distintas ecuaciones en diferencia:

(2) $\lambda_{t+1} - \lambda_t = 0$

EC: $r^t(r-1) = 0$ → r=1

$\lambda_t = k_1 1^t$ por lo tanto $\lambda_t = k_1$.

Reemplazo el resultado anterior en (1)

$\frac{1}{2} u_t^{-\frac{1}{2}} - k_1 = 0 \rightarrow u_t^{-\frac{1}{2}} = 2k_1$

Por lo tanto $u_t = (2k_1)^{-2}$ que es lo mismo que decir $u_t = (\frac{1}{2k_1})^2$

Ahora resolvemos (3) para poder obtener x_t. Reemplazamos

$x_t - (\frac{1}{2k_1})^2 - x_{t+1} = 0 \rightarrow x_{t+1} - x_t = -(\frac{1}{2k_1})^2$

Resolviendo la ecuación en diferencia podemos obtener:

$x_t = k_2 - (\frac{1}{2k_1})^2$

This document is available on studocu
Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

$V(x_t) = Max\ (u_t)^{\frac{1}{2}} + v_{t+1}(x_t - u_t)$ $\qquad x_t - u_t = x_{t+1}$

c. Ecuación de Euler:

CPO

$\frac{\partial v_t}{\partial u_t} = \frac{1}{2}(u_t)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\partial v_{t+1}}{\partial x_{t+1}} . \frac{\partial x_{t+1}}{\partial u_t} = 0$

$\frac{\partial v_t}{\partial u_t} = \frac{1}{2}(u_t)^{-\frac{1}{2}} - \frac{\partial v_{t+1}}{\partial x_{t+1}} . (-1) = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}(u_t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial v_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$

BySS

$\frac{\partial v_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f}{\partial x_t} + \frac{\partial v_{t+1}}{\partial x_{t+1}} . \frac{\partial x_{t+1}}{x_t} = 0 + \frac{\partial v_{t+1}}{\partial x_{t+1}} .1 = \frac{\partial v_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$

Remplazo ambos

$\frac{\partial v_t}{\partial x_t} = -\frac{1}{2}(u_t)^{-\frac{1}{2}}$

Desplazo un período y remplazo en CPO

$-\frac{1}{2}(u_{t+1})^{-\frac{1}{2}} = \frac{\partial v_{t+1}}{\partial x_{t+1}}$

$-\frac{1}{2}(u_t)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u_{t+1})^{-\frac{1}{2}} = 0$

Obtengo ecuación de Euler

$U_{t+1} - u_t = 0$

$\begin{cases} u_{t+1} - u_t = 0 \\ x_{t+1} - x_t + u_t = 0 \end{cases}$

$x_t - \frac{1}{4{k_1}^2} - x_{t+1} = 0$

$x_{t+1} - x_t = -\frac{1}{4{k_1}^2}$

$r - 1 = 0 \rightarrow r = 1$

${x_t}^h = 1^t . k_2 = k_2$

Solución complementaria:

${x_t}^c = (A)\ t \rightarrow {x_{t+1}}^c = A\ t\ +\ A$

$At + A - At = -\frac{1}{4{k_1}^2} \rightarrow A == -\frac{1}{4{k_1}^2}$

${x_t}^c = \left(-\frac{1}{4{k_1}^2}\right) . t$

$x_t = k_2 - (\frac{1}{4{k_1}^2}) . T$

Resolución por Euler:

$v_t(x_t) = Max\ f\ (x_t; u_t) + v_{t+1}\ (g\ (x_t; u_t))$

$v_t(x_t) = f\ (x_t; h(x_t)) + v_{t+1}\ (g\ (x_t; (x_t)))$

$v_t(x_t) = Max\ (u_t)^{\frac{1}{2}} + v_{t+1}(\ x_{t+1})$

$u_{t+1} - u_t = 0 \qquad r = 1$

$u_t = c_1$

$x_{t+1} - x_t = -c_1 \qquad r = 1$

${x_t}^h = c_2$

${x_t}^c = At \rightarrow {x_{t+1}}^c = At + A \rightarrow At + A - At - c_1 \rightarrow A = c_1$

$x_t = c_2 - c_1 t$

5) $Max\ U = \sum_{t=0}^{T} (\frac{1}{1+w})^t\ lnc_t \quad s.a: s_{t+1} = (1+\delta)(s_t - c_t) \quad s_t\ dado\ y\ S_{T+1} = 0$

Plantear las CPO del método de Lagrange y resolver por el mismo método:

Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

$L = \ (\frac{1}{1+w})^t lnct + [(1+\delta)\, s_t - c_t - s_{t+1}]$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathrm{ct}} = \frac{(\frac{1}{1+w})^t}{\mathrm{ct}} - \lambda \mathrm{t}\,(1+\delta) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_{t+1}} = (1+\delta)\lambda_{t+1} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_{T+1}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = (1+\delta)s_t - c_t - s_{t+1} = 0 \quad (2)$$

Resolvemos las ecuaciones en diferencia con $\alpha = (1+\delta) \quad \beta = \frac{1}{1+w}$

$\alpha\lambda_{t+1} - \lambda_t = 0$
$EC = \ \alpha r - 1 = 0 \rightarrow r = \frac{1}{\alpha}$
$\lambda_t = k_1 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^t \rightarrow reemplazo\ en\ (1)$
$c_t = \frac{1}{\alpha k_1}(\alpha\beta)^t$

$(2)\ \alpha s_t - s_{t+1} = \alpha c_t$
$EC = \alpha - r = 0 \rightarrow r = \alpha$
$s_t = A\ (1+\delta)(\frac{1}{1+w})^t$
$-\ (1+\delta)(\frac{1}{1+w})^t A\ (1+\delta)(\frac{1}{1+w})^t = (1+\delta)(\frac{1}{1+w})^t$
$A = \frac{1}{k_1\alpha(1-\beta)}$

$$s_t = k_2\alpha^t + \frac{1}{k_1\alpha(1-\beta)}(\alpha\beta)^t$$

Encontrar la ecuación de Euler $\alpha = (1+\delta) \quad \beta = \frac{1}{1+w}$

$W_t = lnc_t + \beta W_{t+1}(s_{t+1})$

Aplicamos la condición de primer orden:

$$\frac{\partial W_t}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \alpha\beta\frac{\partial W_{t+1}}{\partial c_{t+1}} = 0$$

Despejamos $\frac{\partial W_{t+1}}{\partial c_{t+1}}$:

$$\frac{\partial W_{t+1}}{\partial c_{t+1}} = \frac{1}{\alpha\beta c_t}\ (1)$$

Hallamos la ecuación de Benveniste y Scheinkman y adelantamos un periodo:

$$\frac{\partial W_t}{\partial s_t} = \frac{1}{c_t} \rightarrow \frac{\partial W_{t+1}}{\partial s_{t+1}} = \frac{1}{c_{t+1}}$$

Reemplazamos en la condición de primer orden:

$$\frac{1}{c_t} - \alpha\beta\frac{1}{c_{t+1}} = 0 \ \rightarrow \ c_{t+1} = \alpha\beta c_t$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones en diferencias:

$c_{t+1} - \alpha\beta c_t = 0$
$s_{t+1} - \alpha s_t = -\alpha c_t$

$c_{t+1} - \alpha\beta c_t = 0$
$r - \alpha\beta = 0$
$r = \alpha\beta$
$c_t = k_1(\alpha\beta)^t$

This document is available on studocu

Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

$s_{t+1} - \alpha s_t = -\alpha k_1 (\alpha\beta)^t$

$r - \alpha = 0$

$r = \alpha$

$s_t = A\ (\alpha\beta)^t$

$s_{t+1} = A\ (\alpha\beta)^{t+1}$

$A(\alpha\beta)\ (\alpha\beta)^t - \alpha A\ (\alpha\beta)^t = -\alpha k_1 (\alpha\beta)^t$

$$A = \frac{k_1}{1-\beta}$$

$$s_t = k_2 \alpha^t + \frac{k_1}{1-\beta}(\alpha\beta)^t$$

Función de política mediante Bellman:

$t = T+1 \quad W_{T+1} = 0$

$t = T \quad W_T = lnc_t + \beta w_{t+1} \rightarrow W_T = lnc_T$

$S_{t+1} = a\ s_t - c_t - 0 \quad \rightarrow \quad c_T = s_T$

$t = T-1 \rightarrow W_{T-1} = lnc_{T-1} + \beta w_T(s_T) = lnc_{T+1} + \beta ln[\alpha(s_{T-1} - c_{T-1})]$ (1)

$s_T = \alpha\ s_{T-1} - c_{T-1}$

$$\frac{\partial W_{T-1}}{\partial c_{T-1}} = \frac{1}{c_{T-1}} - \frac{\beta\alpha}{\alpha(s_{T-1} - c_{T-1})} = 0 \rightarrow c_{T-1} = \frac{S_{T-1}}{1+\beta} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$W_{T-1} = ln\left(\frac{S_{T-1}}{1+\beta}\right) + \beta ln\left[\frac{\alpha\beta S_{T-1}}{1+\beta}\right]$$

$t = T-2 \quad W_{T-2} = lnc_{T-2} + \beta w_{T-1}(s_{T-1})$

$s_{T-1} = \alpha\ (s_{T-2} - c_{T-2})$

$$\frac{\partial W_{T-2}}{\partial c_{T-2}} = \frac{1}{c_{T-2}} + \beta\left[\frac{-\alpha}{1+\beta}\frac{1}{\alpha(s_{T-2} - c_{T-2})} + \beta\left(\frac{-\alpha^2\beta}{1+\beta}\frac{1}{\alpha^2\beta(s_{T-2} - c_{T-2})}\right)\right] = 0 \rightarrow c_{T-2} = \frac{S_{T-2}}{1+\beta+\beta^2}$$

Generalizando:

$$c_t = \frac{S_t}{\sum_{i=0}^{T-t}\beta^i}$$

8)

a. $L(x_t; u_t; \lambda_t) = \sum_{t=1}^{T} b\sqrt{x_t - u_t} + \lambda_t\ (a.u_t - x_{t+1})$

$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{-b}{2}\ (x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} + a\ \lambda_t = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x_{t+1}} = \frac{b}{2}\ (x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}} - \lambda_t = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_t} = a.u_t - x_{t+1} = 0$

b. De la primera tenemos que $\lambda_t = \frac{b}{2a}\ (x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}}$ y de la segunda, $\lambda_t = \frac{b}{2}\ (x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}$

Igualándolas y operando algebraicamente llegamos a la siguiente expresión:

$a^2\ (x_t - u_t) - x_{t+1} - u_{t+1} = 0$

Que junto con la tercera condición de primer orden conforman el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia:

$a^2\ (x_t - u_t) - x_{t+1} - u_{t+1} = 0$ (1)

$x_{t+1} - a\ u_t = 0$ (2)

De (**2**) tenemos que $u_t = \frac{x_{t+1}}{a}$ y si lo reemplazamos en (1), luego de algunas operaciones llegamos a la siguiente ecuación en diferencia homogénea:

Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

$a^2\ (x_t) - x_{t+1}(a-1) - \frac{x_{t+2}}{a} = 0$

De la misma se obtiene que las raíces serán $(r_1; r_2) = \frac{(a+1) \pm \sqrt{a^2-2a+1}}{\frac{2}{a}}$

Por lo tanto, la solución al sistema será:

$x_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t$

$u_t = \frac{c_1 r_1^{t+1} + c_2 r_2^{t+1}}{a}$

c. Para resolver mediante el método de Bellman, el primer paso consiste en plantear la Ecuación de Bellman:

$V_t(x) = max\ \{b\sqrt{x_t - u_t} + V_{t+1}(x_{t+1})\}$

Comenzamos con t = T, en este caso

$V_T(x_T) = b\sqrt{x_T - u_T}$ ya que $V_{T+1}(x_{T+1}) = 0$

$X_{T+1} = a.u_T = 0$

Por lo tanto, $V_T(x_T) = b\sqrt{x_T}$

Realizamos lo mismo para t = T-1

$V_{T-1}(x_{T-1}) = b\sqrt{x_{T-1} - u_{T-1}} + b\sqrt{x_T}$ (1)

$X_T = a.u_{T-1}$ (2)

Reemplazando (2) en (1) obtenemos $V_{T-1}(x_{T-1}) = b\sqrt{x_{T-1} - u_{T-1}} + b\sqrt{a.u_{T-1}}$ (3)

Entonces, $\frac{\partial V_{T-1}}{\partial u_{T-1}} = \frac{-b}{2}(x_{T-1} - u_{T-1})^{-\frac{1}{2}} + \frac{ba}{2}\ (u_{T-1}a)^{-\frac{1}{2}} = 0$

Despejando u_{T-1} llegamos a la siguiente expresión

$u_{T-1} = \frac{a\ x_{T-1}}{(a+1)}$ (función política) que reemplazándola en (3) nos permite llegar a la siguiente expresión:

$V_{T-1}(x_{T-1}) = b\ \sqrt{(a+1)\ x_{T-1}}$

Por último, realizamos el mismo proceso para t = T-2

$V_{T-2}(x_{T-2}) = b\sqrt{x_{T-2} - u_{T-2}} + b\sqrt{(a+1)x_{T-1}}$ (4)

$X_T = a.u_{T-2}$ (5)

Reemplazando (5) en (4) obtenemos $V_{T-2}(x_{T-2}) = b\sqrt{x_{T-2} - u_{T-2}} + b\sqrt{(a+1)a.u_{T-2}}$ (6)

Entonces, $\frac{\partial V_{T-2}}{\partial u_{T-2}} = \frac{-b}{2}(x_{T-2} - u_{T-2})^{-\frac{1}{2}} + \frac{ba(a-1)}{2}\ [(a-1)\ a\ u_{T-2}]^{-\frac{1}{2}} = 0$

Despejando u_{T-2} (función política) llegamos a la siguiente expresión

$u_{T-2} = \frac{(a^2+a)\ x_{T-2}}{a^2+a+1}$ que reemplazándola en (**6**) nos da por resultado:

$V_{T-2}(x_{T-2}) = b\ \sqrt{(a^2+a+1)\ x_{T-2}}$

Por lo tanto:

- En t=T $u_t^* = 0$ y $V_T(x_T) = b\sqrt{x_T}$
- En t=T-1 ${u_{T-1}}^* = \frac{a\ x_{T-1}}{(a+1)}$ y $V_{T-1}(x_{T-1}) = b\ \sqrt{(a+1)\ x_{T-1}}$
- En t=T-2 ${u_{T-2}}^* = \frac{(a^2+a)\ x_{T-2}}{a^2+a+1}$ y $V_{T-2}(x_{T-2}) = b\ \sqrt{(a^2+a+1)\ x_{T-2}}$

Generalizando obtenemos la siguiente función de política y su retorno total:

$u_t(x) = \frac{(a + a^2 + \cdots + a^{T-t})\ x_t}{1 + a + a^2 + \cdots + a^{T-t}} = x_t \cdot \frac{\sum_{s=1}^{T-t} a^s}{\sum_{S=0}^{T-t} a^s}$

This document is available on studocu

Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)

$$v_t(x) = b\sqrt{(1 + a + a^2 + \cdots + a^{T-t})\, x_t} = b\sqrt{\sum_{S=0}^{T-t}(a^s)\, x_t}$$

d. Finalmente, para resolver este problema utilizando el método de Euler partimos de la ecuación de Bellman:

$$V_t(x) = max\ \{b\sqrt{x_t - u_t} + b\sqrt{x_{t+1}}\ \}$$

Lo primero que tenemos que hacer es plantear la derivada de la función con respecto a la variable de control u_t y la derivada con respecto a la variable de estado x_t :

1. $\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{\partial f(x_t,u_t)}{\partial u_t} + \frac{\partial V_{t+1}(x_{t+1})}{\partial x_{t+1}}\frac{\partial g(x_t,u_t)}{\partial u_t} = 0$

Reemplazando:

$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{-b}{2}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial u_{t+1}}\ a = 0$ de forma que $\frac{\partial V_{t+1}}{\partial u_{t+1}} = \frac{b}{2a}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}}$

2. $\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{\partial f(x_t,u_t)}{\partial x_t} + \frac{\partial V_{t+1}(x_{t+1})}{\partial x_{t+1}}\frac{\partial g(x_t,u_t)}{\partial x_t}$

Reemplazando:

$\frac{\partial V_t}{\partial x_t} = \frac{b}{2}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b}{2a}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}}.0$

Aplicando el operador desplazamiento llegamos a:

$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{t+1}} = \frac{b}{2}(x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}$

Reemplazando la expresión anterior en (1)

$\frac{\partial V_t}{\partial u_t} = \frac{-b}{2}(x_t - u_t)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b}{2}(x_{t+1} - u_{t+1})^{-\frac{1}{2}}\, a = 0$

Teniendo en cuenta esta última expresión y la restricción del comienzo podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones en diferencia:

$$a^2\,(x_t - u_t) - x_{t+1} - u_{t+1} = 0$$

$$x_{t+1} - a\,u_t = 0$$

Como podrán notar, es el mismo que planteamos utilizando el Método de Lagrange, por lo tanto, resolviendo de la misma forma llegaremos a:

$$x_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t$$

$$u_t = \frac{c_1 r_1^{t+1} + c_2 r_2^{t+1}}{a}$$

Downloaded by tobias baziti (tobybaziti@gmail.com)